

Екзаменаційна робота
Студента 3-курсу ФРЕКС
спеціальності ПФНКТ, групи ПФНКТ-1
Грохольського Владислава Олександровича

Екзаменаційний білет №

1. Келінський консервативний осцилятор не є стійким за Ляпуновим.

Стійкість за Ляпуновим відповідає випадку малого відхилення (можна сказати нульового) двох точок на фазовому просторі та їхніх траєкторій на фазовому портреті, якщо ці точки мають не однакові початкові умови.

Келінський кон. осц. є амплімонічним поперше, а подруге має ^{інш} більш важливу властивість у даному випадку - явище неізохронності - коли власна частота є функцією амплітуди.

Потрібно якщо у певний момент взяти два відмінні розв'язки системи рівн. кон. осц. ^{з різною амплітудою (для доведення стійкості)} то з тими ж масою сусідні точки будуть нескінченно розходитись, що не є стійкістю за Ляпуновим.

★ З різною амплітудою (для доведення стійкості)

2. Проаналізувати вимушені коливання математичного маятника під дією короткого сильного удару методом інтеграла Фур'є не можна (або можна, але дуже складно).
Математичний маятник - система з одним ступенем вільності тож рівняння власних коливань:

$$b_0 \ddot{x} + b_1 \dot{x} + b_2 x = 0$$

коли діє зовн. негарм. сила візьмемо рахунок рівн.

$$a_0 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = f(t)$$

$$a_0, b_0 \neq 0$$

Метод інтегралів Фур'є за основу бере розклад зовнішньої
(рядів) сили на нескінченні у часі гармоніки, та розкладає
їх одночасний вплив на систему. Тут і виникає
складність неможливості (або можливості із обчислювальною
технікою) опису короткого сильного удару за допомогою
суперпозиції гармонік. Значно доречнішим буде викорис-
тання Інтералу Дюгамеля, котрий короткі удари "розтя-
гує" в часі за допомогою функції Гріна.

3. 4 мод ос. } $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4$

$$\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = 0$$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0$$

$$\ddot{X}_3 + \omega_3^2 X_3 = 0$$

$$\ddot{X}_4 + \omega_4^2 X_4 = 0$$

Две 1) $\ddot{X}_1 + \omega_1^2 X_1 = \sum_{i,j,k=1}^4 \alpha_{ijk} X_i X_j X_k$

$$\ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = \sum_{i,j,k=1}^4 \beta_{ijk} X_i X_j X_k$$

$$\ddot{X}_3 + \omega_3^2 X_3 = \sum_{i,j,k=1}^4 \gamma_{ijk} X_i X_j X_k$$

$$\ddot{X}_4 + \omega_4^2 X_4 = \sum_{i,j,k=1}^4 \delta_{ijk} X_i X_j X_k$$

Решим в виде

$$X_1(t) = A_1(t) e^{i\omega_1 t} + A_1^*(t) e^{-i\omega_1 t}$$

$$X_2(t) = A_2(t) e^{i\omega_2 t} + A_2^*(t) e^{-i\omega_2 t}$$

$$X_3(t) = A_3(t) e^{i\omega_3 t} + A_3^*(t) e^{-i\omega_3 t}$$

$$X_4(t) = A_4(t) e^{i\omega_4 t} + A_4^*(t) e^{-i\omega_4 t}$$

Значит $\omega_1 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_2$

Мне не нравится:

$$\sum_{i,j,k=1}^4 \alpha_{ijk} X_i X_j X_k = \alpha_{234} (A_2 e^{i\omega_2 t} + A_2^* e^{-i\omega_2 t}) (A_3 e^{i\omega_3 t} + A_3^* e^{-i\omega_3 t}) \times (A_4 e^{i\omega_4 t} + A_4^* e^{-i\omega_4 t}) -$$

$$= \alpha_{234} A_2^* A_3 A_4 e^{i(\omega_3 + \omega_4 - \omega_2)t} = \alpha_{234} A_2^* A_3 A_4 e^{i\omega_1 t}$$

$$\dot{X}_1 = \dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} + i\omega_1 A_1 e^{i\omega_1 t} + \text{к.с.}$$

$$\ddot{X}_2 = \ddot{A}_2 e^{i\omega_2 t} - \omega_2^2 A_2 e^{i\omega_2 t} + 2i\omega_2 \dot{A}_2 e^{i\omega_2 t}$$

$$i\dot{A}_1 = \frac{\alpha_{234}}{2\omega_1} A_2^* A_3 A_4$$

$$2i\omega_1 \dot{A}_1 e^{i\omega_1 t} = \alpha_{234} A_2^* A_3 A_4 e^{i\omega_1 t}$$

$$i \dot{A}_1 = \frac{\omega_{234}}{2\omega_1} A_2^* A_3 A_4 \quad \text{— одне з скорочених рівнянь}$$

дані анало гічно знаходимо
і для $\dot{A}_2, \dot{A}_3, \dot{A}_4$

за браком часу спробуємо методом аналогії

$$i \dot{A}_1 = \frac{\omega_{234}}{2\omega_1} A_2^* A_3 A_4$$

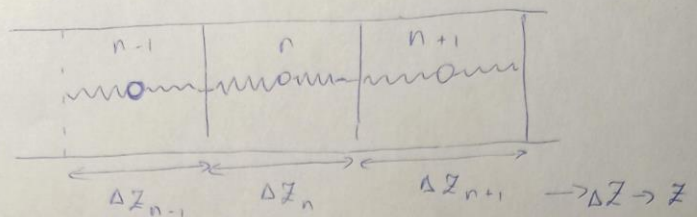
$$i \dot{A}_2 = \frac{\omega_{134}}{2\omega_2} A_1^* A_3 A_4$$

$$i \dot{A}_3 = \frac{\omega_{124}}{2\omega_3} A_1 A_2 A_4^*$$

$$i \dot{A}_4 = \frac{\omega_{123}}{2\omega_4} A_1 A_2 A_3^*$$

— сист
скорочених рівнянь

4.



$$m \frac{d^2 z_n}{dt^2} = -k \Delta z_n + k (z_{n-1} + z_{n+1} - 2z_n)$$

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} = -\frac{k}{m} z_n + \frac{k}{m} (z_{n-1} + z_{n+1} - 2z_n)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$z_n = z'_n \exp(i\omega t - i k n a)$$

z'_n - такое z_n как $\Delta z_n = 0$
положение n башка

$$-\omega^2 z'_n \exp(i\omega t - k n a) = -\frac{k}{m} z'_n \exp(i\omega t - k n a) + \omega_0^2 z'_n (\exp(i\omega t - (k n a)(n-1)) + \exp(i\omega t - (k n a)(n+1)) - 2 \exp(i\omega t - k n a))$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 (\exp(k a) + \exp(-k a) - 2) \omega_0^2$$

$$2 \cos k a$$

$$\omega^2 = 3 \omega_0^2 - 2 \cos k a \cdot \omega_0^2$$